

浙江大学 2024 - 2025 学年 秋冬 学期

《概率论与数理统计》课程期末考试试卷

一、填空题

1. 已知随机变量 X 的概率密度函数为 $\begin{cases} 2xe^{-x^2}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 则 $E(\frac{1}{X}) =$ _____.

2. 已知 $P(A) = 0.4$, $P(B|A) = 0.5$, $P(B|\bar{A}) = P(C) = 0.6$, AB 与 C 独立, 则 $P(AC|B) =$ _____.

3. 设 X, Y 服从参数为 2 的泊松分布, 且 X 与 Y 相互独立, 则 $P(X \leq 1) =$ _____,

$P(X = 0 | X + Y = 2) =$ _____.

4. 设随机变量 X 满足 $P(X = 2) = \frac{3}{4}$, $P(X = \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, X_1, \dots, X_n 是独立且与 X 同分布的随机变量, 则当

$n \rightarrow +\infty$ 时:

(1) $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P}$ _____;

(2) $\sqrt[n]{X_1 X_2 \dots X_n} \xrightarrow{P}$ _____;

(3) $X_1, X_2, \dots, X_{4800}$ 中有 3650 个随机变量大于 1 的概率为 _____.

5. 设二元正态变量 $(X, Y) \sim N(1, 0, 16, 25, 0.25)$, 则 $2X - Y - 1 \sim$ _____ 分布 (写出参数).

6. 设正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\bar{X} = \frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$, $S^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 (X_i - \bar{X})^2$.

(1) 设 μ 未知, 则置信水平为 $1 - \alpha$ 的 σ^2 的单侧置信下限为 _____;

(2) 若 (1) 中 $P_- = 0.08$, $\alpha = 0.05$, 是否接收假设 $H_0: \mu = 0$? _____;

(3) 若 $\frac{\bar{X} - X_1 - X_2 + a}{bS} \sim t(m)$, 则 $(a, b, m) =$ _____.

(4) 设 $\bar{X}^* = \frac{1}{6}(X_1 + X_2 + \dots + X_6)$, 则 \bar{X} 与 \bar{X}^* 的相关系数为 _____.

二、随机变量 X 满足 $P(X=0) = P(X=1) = \frac{1}{2}$, $Y_1 = \min\{X_1, X_2\}$, $Y_2 = \min\{X_1, X_2, X_3\}$

- (1) 求 $\text{Cov}(X_1 X_2, X_1 X_2 X_3)$
- (2) 求 (Y_1, Y_2) 的联合分布律;
- (3) $Y_1 = 1$ 时, 求 Y_2 的条件分布律.

三、设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x) = \begin{cases} ae^x, & x < 0 \\ b - ae^{-3x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

- (1) 求 X 的概率密度函数 $f_X(x)$;
- (2) 求 $E(X)$;
- (3) 设 $Y = e^X$, 求 $f_Y(y)$;
- (4) 求 a, b ;

四、设二元随机变量 (X, Y) 的联合密度函数 $f(x, y) = \begin{cases} 12y^{-5}, & 1 < x < y \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$.

- (1) 求 $f_X(x), f_Y(y)$, 并判断 X, Y 是否独立;
- (2) 求 $P(1 < X < 1.5 | Y = 2)$;
- (3) 设 $Z = X + Y$, 求 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

五、设随机变量 X 的分布满足含未知参数 μ 的概率密度函数为 $f(x; \mu) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\mu)}, & x \geq \mu \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ，且有简单随机样

本 X_1, \dots, X_n .

- (1) 求参数 μ 的矩估计 $\hat{\mu}_1$ ，并判断其是否为无偏估计；
- (2) 求参数 μ 的极大似然估计 $\hat{\mu}_2$ ，并判断其是否为相合估计；
- (3) 用均方误差准则说明 $\hat{\mu}_1$ 和 $\hat{\mu}_2$ 哪个更有效

六、(本题 15 分) 设正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $X \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，一组简单随机样本如下：

- (1) 求 σ_1^2 / σ_2^2 的置信水平为 0.95 的双侧置信区间；
- (2) 现有原假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ，备择假设 $H_1: \mu_1 < \mu_2$ ，求拒绝域并判断是否接受原假设.