浙江大学 2023-2024 春夏学期概率论与数理统计期末考试

一. (36 分) 填空题 (每空 3 分，共 36 分；各分布要求写出具体参数)

1. 已知 $P(A)=0.7$,$P(B)=0.4$,$P(A-B)=0.5$,$P(A\cup\overline{B})=$______________,$P(B|\overline{A})=$______________.

2. 若公交车站候车人数记为 X,$X\sim P(\lambda)$, 且已知恰有 1 人候车的概率与恰有 2 人候车的概率相等, 则 $E(X^2)=$______________, 该公交车站至少有 4 人候车概率为______________, 现已知至少 4 人候车，则恰有 4 人候车的概率为______________.

3. 独立重复投掷一颗均匀的骰子 3 次, 令 X 表示这三次点数之和, Y 表示三次中最小的点数，Z 表示出现 1 点的次数, 则 $E(X)=$______________, $P(Y=2)=$______________,$P(X=6|Z=1)=$______________.

4. 设正太总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$\mu\in R$,$\sigma^2>0$ 未知, $X_1,...X_n$ 为来自该总体的简单随机样本,$n\geq 4$,
   (1). $\left(\dfrac{X_1+X_2-X_3-\mu}{X_2+X_3-X_4-\mu}\right)^2$ 服从______________分布, 若 $\dfrac{(\overline{X}-X_1)^2}{a}\sim\chi^2(k)$, 其中 $\overline{X}$ 为样本均值，则 $(a,k)=$______________.
   (2). 当 $n\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 依概率收敛到______________.
   (3). 当 $\sigma=2$ 已知时, 若 $n=36$,$\overline{x}=1.5$, 则检验 $H_0:\mu\geq 2$, $H_1:\mu<2$ 的 p 值为______________.

二. (10 分) 某人出门去甲地。若天气好，就骑共享单车去，所花时间 (单位：分钟) 服从均匀分布 $U(20,40)$；若天气不好，就步行至地铁站坐地铁，所花时间服从 $U(30,50)$，若天气好的概率为 0.8，

(1). 求此人出门半小时后还没到甲地的概率。

(2). 若已知此人出门半小时后还没到甲地，求他骑共享单车的概率。

三.（12 分） 设 X、Y 的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/9	2/9	a
1	3/9	2/9	0

(1). 求常数 a.

(2). 求 $Cov(X,Y)$, 并判断 X 与 Y 的相关性.

(3). 求 $\{Y=1\}$ 的条件下,X 的条件分布函数 $F_{X|Y}(x|1)$.

四.（14 分） 设 X、Y 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, x>0\text{且}x<y<x+1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

(1). 分别求 X 与 Y 的边际密度函数 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$, 并判断两者是否独立.

(2). 求 $P(X<0.5|Y=1)$.

(3). 求 $E(XY)$.

五. （14 分） 已知总体的概率密度函数：

$$f(x)=\begin{cases}3\theta^{-3}x^2, 0<x<\theta\\ 0, \text{其他}\end{cases}$$

$X_1...X_n$ 是从总体中抽取的 n 个样本.

(1). 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta_1}$, 并判断是否是相合估计.

(2). 当 n 足够大时, 求 $\hat{\theta_1}$ 的分布.

(3). 求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta_2}$, 并判断是否是无偏估计.

六. （14 分） 有 A、B 两种小麦，发芽时间分别服从 $N_1(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N_2(\mu_2,\sigma_2^2)$, 现分别从两种小麦中取 11 和 10 个样本, 样本均值分别为 $\overline{x}=99.1$,$\overline{y}=88.9$, 样本方差分别为 $s_1^2=0.94$,$s_2^2=0.88$, 求：

(1). $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 在置信水平为 0.95 下的双侧等尾置信区间, 并判断 σ_1^2 是否等于 σ_2^2?

(2). 在 (1) 的基础上，$H_0:\mu_1=\mu_2$; $H_1:\mu_1\neq\mu_2$, 在显著水平 $\alpha=0.05$ 下检验 H_0.