浙江大学《概率论与数理统计》

2021-2022 学年第二学期期末考试 A 卷

注：$\Phi(1)=0.841$，$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$，$t_{0.16}(18)=1.03$，$t_{0.05}(18)=1.73$，$t_{0.025}(18)=2.10$，$F_{0.025}(9,9)=4.03$，$F_{0.472}(9,9)=1.05$，$F_{0.975}(9,9)=0.25$，$\chi^2_{0.05}(4)=9.49$，$\chi^2_{0.05}(3)=7.82$，$\chi^2_{0.05}(2)=5.99$.

一、填空题(每小格 3 分，共 36 分)

1.设A, B, C为三个相互独立的随机事件，$P(A)=P(B)=P(C)=p$，则A, B, C至少有一个发生的概率为_________

2.设随机变量X在区间$(-1,2)$服从均匀分布，则当$-1<x<2$时，分布函数$F(x)=$_________

3.某带大型计算机在任何长度为t(单位：天)时间段内故障的次数N_t服从参数为$\frac{t}{72}$的泊松分布，则72 天内至少发生 2 次故障的概率为_________.色号从年初一开始到第一次发生故障的时间为T(天)，则当$t>0$时，$P(T>t)=$_________，$E(T)=$_________.

4.设(X,Y)~$N(1,1,1,1,0.5)$，则$P(X>0)=$，$X-Y$与$X+Y$是否独立？_________ (独立、不独立).假设从总体(X,Y)抽取一个样本(X_i,Y_i), $i=1,2,\cdots,n$，则$\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)^2$服从______分布(要求写出参数).当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)^2$依概率收敛到_________.

5.设总体X~$N(\mu,1)$，从总体中抽取一个样本$X_1,\cdots,X_{16}$，样本均值为$\bar{X}$，若置信水平等于 0.95 的μ的置信区间为$\left(\bar{X}-\delta,\bar{X}+\delta\right)$，则$\delta=$_________.如果从总体中独立重复抽取 10 个容量为 16 的样本，并计算得出 10 个置信水平等于 0.95 的μ的置信区间，问恰有一个区间不覆盖真值μ的概率为

二、(12 分)假设投掷以概率$p\left(\frac{1}{2}<p<1\right)$出现正面的非均匀硬币 2 次，出现正面的次数记为$X$.在 2 次投掷中，每当出现正面时，立即投掷另一枚以概率$\frac{1}{2p}$出现正面的硬币，记出现的正面次数为Y.

(1)求(X,Y)的联合分布律；(2 分别求X, Y的边际分布律；(3)判断X, Y是否独立?说明理由.

三、(14 分)假设$X_1, X_2, \cdots, X_5$为相互独立的随机变量，$X_1, X_2, \cdots, X_5$都服从均值为 1 的指数分

布，Y服从$B\left(1, \frac{1}{3}\right)$. 记$Z_i = X_i Y$, $i=1$, $\cdots$, 5.

(1)求$W=\max(X_1, X_2, \cdots, X_5)$的分布函数和概率密度函数.

(2)求$M=\max(Z_1, Z_2, \cdots, Z_5)$的分布函数和$P(M=0)$.

四、(14 分)假设总体 X 服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，μ, σ^2均为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为从总体中抽取的一个样本.

(1)分别求μ, σ^2的极大似然估计；

(2)求参数函数$g(\mu, \sigma^2)=3\mu+4\sigma^2$的极大似然估计 T;

(3)求$E(T)$，并判断问 T 是不是$g(\mu, \sigma^2)$的无偏估计？是不是$g(\mu, \sigma^2)$的相合估计？说明理由；

(4)求$Var(T)$.

五、(14 分)从两条糖果生产线上分别抽取容量为 10 的独立样本，计算得 A 线与 B 线得样本均值分别为$\bar{x}_1=100.55$, $\bar{x}_2=98.08$，样本标准差分别为$s_1=5.44$, $s_2=5.31$.假设 A 线糖果得重量服从$N(\mu_1, \sigma_1^2)$，B 线糖果得重量服从$N(\mu_2, \sigma_2^2)$.显著性水平为 0.05.

(1)检验H_0：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，H_1：$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$.(保留 2 位小数)

(2)假设方差相等，检验H_0：$\mu_1=\mu_2$，H_1：$\mu_1\neq\mu_2$.(保留 2 位小数)

(注：要求写出检验统计量，在H_0为真时检验统计量的分布，检验统计量的值，检验的拒绝域，检验结果)

六、(10 分)记录某城市 210 天交通事故发生情况，数据如下：

事故数	0	1	2	3	4	5
天数	109	65	22	3	4	7

初步推荐每日发生交通事故数服从泊松分布，用拟合优度检验推断(显著性水平为 0.05)

2021-2022 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题(每小格 3 分，共 36 分)

1.【正解】$1-(1-p)^3$

【学解】则A, B, C至少有一个发生的对立事件是：A, B, C均不发生因此，A, B, C至少有一个发生的概率为$1-P\left(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\right)=1-P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)P\left(\overline{C}\right)=1-(1-p)^3$

【考点延伸】《概率论宝典》第一章 随机事件与概率【知识清单】 1.4、概率的基本公式

2.【正解】$\dfrac{x+1}{3}$

【学解】分布函数$F(x)=\dfrac{x+1}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 一维随机变量及其分布【知识清单】2.1：分布函数的性质.

3.【正解】0.264

【学解】72 天发生的故障次数$N_{72}\sim P(1)$，$P(N_{72}=0)=\dfrac{1^0}{0!}e^{-1}=e^{-1}$，$P(N_{72}=1)=\dfrac{1^1}{1!}e^{-1}=e^{-1}$，

72 天内至少发生 2 次故障的概率为$1-e^{-1}-e^{-1}=0.264$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 一维随机变量及其分布【重要题型】 2.4 常见的一维随机变量及分布

4.【正解】0.841，独立，$\chi^2(n)$，1

【学解】$X\sim N(1,1),P(X>0)=1-P(X\leqslant 0)=1-\Phi\left(\dfrac{0-1}{1}\right)=1-\Phi(-1)=\Phi(1)=0.841$

$E(X-Y)=0,E(X+Y)f_Y(y)=2,E[(X-Y)(X+Y)]=E(X^2-Y^2)=EX^2-EY^2=DX+(EX)^2$
$-DY-(DY)^2=1+1^2-1-1^2=0$

$Cov[(X+Y),(X-Y)]=E[(X+Y)(X-Y)]-E(X+Y)E(X-Y)=0$

$X-Y$ 与 $X+Y$ 独立

$D(X_i-Y_i)=DX+DY-2Cov(X,Y)=1+1-2\times 0.5\times 1\times 1=1,X_i-Y_i\sim N(0,1)$

$(X_i,\ Y_i)$, $i=1$，2，…，n，相互独立，因此$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)^2\sim\chi^2(n)$

样本均值依概率收敛到总体均值，因此$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)^2$依概率收敛到 1

【考点延伸】《考试宝典》第四章 随机变量的数字特征 【知识清单】 4.1 数学期望 4.2 方差

5.【正解】0.49 , 0.315

二、【学解】（1）求(X, Y)的联合分布如下：

Y \ X	0	1	2
0	$(1-p)^2$	$(1-p)(2p-1)$	$\frac{(2p-1)^2}{4}$
1	0	$1-p$	$p-\frac{1}{2}$
2	0	0	$\frac{1}{4}$

（2）$X \sim B(2,p), P(X=0)=(1-p)^2$，$P(X=1)=2p(1-p)$，$P(X=2)=p^2$

$P(Y)=(1-p)^2+p(1-p)(2p-1)+\left(p-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，$P(Y=1)=1-p+p-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$P(Y=2)=\frac{1}{4}$

（3）不独立，因为$P(X=0, Y=1)\neq P(X=0)\cdot P(Y=1)$

【考点延伸】《考试宝典》第三章 多维随机变量及其分布【重要题型】1：离散型二维随机变量及其分布律

三、【学解】（1）当$x\geqslant 0$时，$P(W\leqslant x)=P(\max(X_1, X_2, \cdots, X_5)\leqslant x)=[P(X\leqslant x)]^5=[1-e^{-x}]^5$

W的分布函数$F_W(x)=\begin{cases}[1-e^{-x}]^5, x\geqslant 0\\ 0, x<0\end{cases}$

W的概率密度函数$f_W(x)=\begin{cases}5e^{-x}[1-e^{-x}]^4, x\geqslant 0\\ 0, x<0\end{cases}$

（2）$P(M=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^5$，$P(M=1)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^5$

M的分布函数$F_M(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \left(\frac{2}{3}\right)^5, 0\leqslant x<1\\ 1, x\geqslant 1\end{cases}$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 一维随机变量及其分布【重要题型】4：连续型随机变量函数的概率分布.

四、【学解】（1）X的概率密度函数$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$

似然函数$L(\mu,\sigma^2)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$

对数似然函数$\ln[L(\mu,\sigma^2)]=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$

令偏导数等于0

$\frac{\partial \ln[L(\mu,\sigma^2)]}{\partial \mu}=-2\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)}{2\sigma^2}=0$，$\mu$的极大似然估计$\hat{u}=\bar{X}$

$$\frac{\partial \ln[L(\mu,\sigma^2)]}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}$$，σ^2的极大似然估计$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$

（2）参数函数$g(\mu,\ \sigma^2) = 3\mu + 4\sigma^2$的极大似然估计$T = 3\bar{X} + \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$

（3）$E\hat{\sigma}^2 = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right] = \frac{n-1}{n}E\left[\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

$ET = 3\mu + \frac{4(n-1)}{n}\sigma^2$，$T$不是$g(\mu,\ \sigma^2)$的无偏估计

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\{T-(3\mu+4\sigma^2)\} &= \lim_{n\to\infty}\left\{3\bar{X}+\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2-(3\mu+4\sigma^2)\right\}\\ &= 3\lim_{n\to\infty}\left\{\bar{X}-\mu\right\}+4\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2-\sigma^2\right\}\\ &= 0\end{aligned}$$

T是$g(\mu,\ \sigma^2)$的相合估计

（4）

$$Var(T) = Var\left(3\bar{X}+\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right) = 3D\bar{X} + D\left(\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right) = \frac{3\mu}{n}+\frac{16}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right]$$

由于$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), D\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1), D\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right] = 2(n-1)\sigma^4,$

因此$Var(T) = \frac{3\mu}{n} + \frac{32(n-1)}{n^2}\sigma^4$

【考点延伸】《考试宝典》第七章 点估计【重要题型】2：极大似然估计.

五、【学解】（1）检验统计量$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1,n-1)$

当检验统计量的观测值$f > F_{0.025}(n-1,n-1)$或$f < F_{0.975}(n-1,n-1)$时拒绝原假设

即拒绝域为$W = \left\{f | f > 4.03 或 t < \frac{1}{4.03}\right\}$，计算检验统计量的观测值$f = \frac{5.44^2}{5.31^2} = 1.05$不属于$W$，

因此接受原假设

（2）方差相等时，检验统计量$T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{S_1^2+S_2^2}}\sqrt{n} \sim t(2n-2)$

当检验统计量的观测值$t > t_{0.25}(2n-2)$或$t < -t_{0.25}(2n-2)$时拒绝原假设

即拒绝域$W' = \{t | t > 2.10 或 t < -2.1\}$，

计算检验统计量的观测值$t = \frac{100.55-98.08}{\sqrt{5.44^2+5.31^2}} \times \sqrt{10} = 1.03$不属于$W'$，因此接受原假设

【考点延伸】《考试宝典》第九章 假设检验 【重要题型】题型3：假设检验.

六、【学解】用λ的极大似然估计值代替近似λ，

$$\hat{\lambda} = \frac{0\times109+1\times65+2\times22+3\times3+4\times4+5\times7}{210} = 0.8$$

H_0:每日发生交通事故数X服从$P(0.8)$

在原假设成立时，

$$=3\lim_{n\to\infty}\{\bar{X}-\mu\}+4\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2-\sigma^2\right\}$$

$$=0$$

T 是 $g(\mu,\sigma^2)$ 的相合估计

（4）

$$Var(T)=Var\left(3\bar{X}+\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)=3D\bar{X}+D\left(\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)=\frac{3\mu}{n}+\frac{16}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right]$$

由于 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),D\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{\sigma^2}\right]=2(n-1),D\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right]=2(n-1)\sigma^4$，

因此 $Var(T)=\dfrac{3\mu}{n}+\dfrac{32(n-1)}{n^2}\sigma^4$

【考点延伸】《考试宝典》第七章 点估计【重要题型】2：极大似然估计.

五、【学解】（1）检验统计量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,n-1)$

当检验统计量的观测值 $f>F_{0.025}(n-1,n-1)$ 或 $f<F_{0.975}(n-1,n-1)$ 时拒绝原假设

即拒绝域为 $W=\left\{f|f>4.03\text{或}t<\dfrac{1}{4.03}\right\}$，计算检验统计量的观测值 $f=\dfrac{5.44^2}{5.31^2}=1.05$ 不属于 W，

因此接受原假设

（2）方差相等时，检验统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{S_1^2+S_2^2}}\sqrt{n}\sim t(2n-2)$

当检验统计量的观测值 $t>t_{0.25}(2n-2)$ 或 $t<-t_{0.25}(2n-2)$ 时拒绝原假设

即拒绝域 $W'=\{t|t>2.10\text{或}t<-2.1\}$，

计算检验统计量的观测值 $t=\dfrac{100.55-98.08}{\sqrt{5.44^2+5.31^2}}\times\sqrt{10}=1.03$ 不属于 W'，因此接受原假设

【考点延伸】《考试宝典》第九章 假设检验 【重要题型】题型 3：假设检验.

六、【学解】用 λ 的极大似然估计值代替近似 λ，

$$\hat{\lambda}=\frac{0\times109+1\times65+2\times22+3\times3+4\times4+5\times7}{210}=0.8$$

H_0：每日发生交通事故数 X 服从 $P(0.8)$

在原假设成立时，

$P(X=0)=\dfrac{0.8^0}{0!}e^{-0.8}=0.45,P(X=1)=\dfrac{0.8^1}{1!}e^{-0.8}=0.36$，$P(X=2)=\dfrac{0.8^2}{2!}e^{-0.8}=0.14$

$P(X\geqslant3)=1-0.45-0.36-0.14=0.05$，

$$\chi^2=\frac{(109-0.45\times210)^2}{0.45\times210}+\frac{(65-0.35\times210)^2}{0.35\times210}+\frac{(22-0.14\times210)^2}{0.14\times210}+\frac{(14-0.05\times210)^2}{0.05\times210}=6.24$$

拒绝域 $\{\chi^2|\chi^2>\chi^2_{0.05}(2)=9.49\}$，$\chi^2=6.24$ 不属于 W，因此接受原假设，认为每日发生交通事故数 X 服从泊松分布

【考点延伸】《考试宝典》第九章 假设检验 【重要题型】题型 3：假设检验.