浙江大学 2024–2025 学年 春夏 学期

《概率论与数理统计》期末考试试卷

课程号：061B9090，开课学院：数学学院

考试试卷：√A 卷、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：√闭、开卷（请在选定项上打√），允许带 计算器 入场

考试日期：2025 年 6 月 19 日，考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

题序	一	二	总 分
得分			
评卷人			

一、填空题（共 36 分，每空 3 分）

1. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(BC)=P(AC)=\frac{1}{12}$，则 A、B、C 恰好有一个事件发生的概率为__________。

2. 有一生物繁育，设 X 为子代个数，$P(X=0)=\frac{1}{4}$，$P(X=1)=\frac{1}{2}$，$P(X=2)=\frac{1}{4}$。X_1，X_2 分别代表第一代、第二代，每一代之间独立且满足 X。已知 $X_0=1$，则 $P(X_2=0)=$__________，$P(X_2=4)=$__________。

3. $X\sim N(5,9)$，$Y\sim N(0,4)$。已知 $Cov(X,Y)=0$，则 $\left(\frac{2X-3Y-10}{2X+3Y-10}\right)^2$ 满足______分布（写出参数）；依概率收敛，$\frac{1}{2n}\sum_{i=n+1}^{2n}2X_i=$_______。

4. $X\sim t(n)$，$Y\sim F(1,n)$。已知 $P(X>c)=0.1$，则 $P(Y>c^2)=$ ________。

5. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$T=\overline{X}^2-\frac{S^2}{n}$，T _____（是/不是）$\mu^2$ 的无偏估计。已知 $\mu=0$，$\sigma=1$，$n=5$，则 $Var(T)=$________。

6. 已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$n=10$，$\overline{X}=5$，$\sum_{i=1}^{n}X_i^2=300$，当置信度为 0.95 时，μ 单测下限为______，当 μ 的置信区间为 $(5-\frac{\sqrt{5}}{2},5+\frac{\sqrt{5}}{2})$ 时，设此时置信度为 α，则 $t_{\alpha/2}$ 为______。

7. X_i 分布律为 $P(X_i=0)=\frac{1}{i}$，$P(X_i=1)=1-\frac{1}{i}$，$S=X_1X_2+X_2X_3+X_3X_4+\cdots+X_nX_{n+1}$，则 $Cov(X_2,S)=$__________，$Cov(X_{n+1},S)=$__________。

二、计算题（共 64 分）

1. 鸟等概率从三个窗口飞出去，X 为飞出窗户时尝试的次数。

（1）如果这个鸟没记忆，求 X 的分布律。

（2）主人说买了一只有记忆的鸟，每个窗户最多飞一次，此时设 Y 为飞出窗户时尝试的次数，求 Y 的分布律。

2. 已知 $f(x,y)=\begin{cases} 8xy & 0<x<1,0<y<x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

（1）求 $P(X<2Y)$。

（2）求 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，并说明 X 和 Y 是否独立。

（3）求 $Cov(X,Y)$，并说明 X 和 Y 是否相关。

3. 已知一架飞机上有 200 个座位，购票的乘客有 10%的概率不乘飞机，故售票时会多卖票，请问最多卖多少张会使航空公司有至少 95%的概率能保证所有购票的乘客都有位置坐。

4. $X \sim U(0,\theta)$，$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，$T_c = cX_{(n)}$，$c$ 为常数。

（1）求 $Var(X)$ 的最大似然估计。

（2）当 T_c 是 θ 的无偏估计时，求 c 的大小。

（3）以 T_c 为估计量，求当其均方估计取最小值时 c 的大小。

5. 为研究作者写作用词的特征，选取作家甲的八部作品并计算出每一部作品中短单词的比例 x，选取作家乙的十部作品并计算出每一部作品中短单词的比例 y，如下表所示：

x	0.248	0.216	0.247	0.217	0.246	0.218	0.245	0.219		
y	0.222	0.198	0.221	0.199	0.220	0.200	0.218	0.202	0.216	0.204

计算得 $\bar{x} = 0.232$，$s_x^2 = 0.000212$，$\bar{y} = 0.2097$，$s_y^2 = 0.000093$

（1）在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 的条件下，检验假设 H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，H_1：$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$。

（2）根据（1）的结论，求 $\mu_1 - \mu_2$ 在 95%置信水平下的双侧置信区间（保留三位小数）并说明 μ_1 与 μ_2 是否有显著差异。