2024-2025 春夏 概率论与数理统计 赵敏智周四67节班 第一次小测

> 好一个惨不忍睹。好好学吧。好好学。

填空题

1. **设** $P(A) = P(B) = P(C) = 0.5,\ P(B|A) = 0.6,\ C$ **与** $A \cup B$ **独立**

   则 $P(\overline{B}|A) =$ ______, $P(A \cup B \cup C) =$ ______.

   答： $P(B|A) + P(\overline{B}|A) = 1$, 故有$P(\overline{B}|A) = 0.4$

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5 + 0.5 - 0.3 = 0.7$

   $P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) = 0.7 + 0.5 - (0.7 \cdot 0.5) = 0.85$

2. **独立重复抛一枚均匀的硬币** 100 **次，若一共出现** 50 **次正面，则前两次都是正面的概率为** ______.

   答：记事件$A =$"一共出现 50 次正面"，事件$B =$"前两次都是正面"。

   则事件$AB =$"前两次正面，之后98次中48次正面"

   $$P(AB) = C_{98}^{48} \cdot \frac{1}{2}^{100}$$

   $$P(A) = C_{100}^{50} \cdot \frac{1}{2}^{100}$$

   $$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{49}{198}$$

3. **设** X **服从参数为** $\lambda > 0$ **的泊松分布，则** $P(X为偶数) - P(X为奇数) =$ ______.

   答：$e^{-2\lambda}$

   过程：AI写的我都看不懂！!！自己写一个。

由麦克劳林知： $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} +$......

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + ...$$

$$\therefore \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots$$

$$P(X为偶数) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{2k}}{(2k)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda} \cdot \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda})$$

$$故P(X为偶数) - P(X为奇数) = e^{-2\lambda}$$

二

设 $X \sim U(-2,4),\ Y=\min\{|X|,\ 2\},\ Z=X^4$

1. **求** Y **的分布函数**
2. **求** Z **的密度函数**
3. **设** A **和** X **独立，且** $P(A=1)=0.2=1-P(A=0)$，**令** $H=X+A$，**计算** $P(H>1|H>0)$

1. 求 (Y) 的分布函数

Y 的取值范围是 [0, 2]

①当$y<0$时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=0$。

②当 $0\leq y<2$时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(|X|\leq y)=P(-y\leq X\leq y)$

$\because X\sim U(-2,4)$，$\therefore f_X(x)=\dfrac{1}{6}(-2\leq x\leq 4)$

$F_Y(y)=\displaystyle\int_{-y}^{y}\frac{1}{6}\,dx=\frac{1}{6}\cdot 2y=\frac{y}{3}.$

③当$y\geq 2$时，$F_Y(y)=P(Y\leq y)=1$。

综上所述，Y的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{if } y<0,\\ \dfrac{y}{3} & \text{if } 0\leq y<2,\\ 1 & \text{if } y\geq 2.\end{cases}$$

2. 求 (Z) 的密度函数

Z的取值范围是$[0,256]$

①当$z<0$时，$F_Z(z)=P(Z\leq z)=0$。

②当$0\leq z<16$时，$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(X^4\leq z)=P(-\sqrt[4]{z}\leq X\leq\sqrt[4]{z})$

由于$X\sim U(-2,4)$，其概率密度函数为$f_X(x)=\dfrac{1}{6}$（在$-2\leq x\leq 4$时），所以

$$F_Z(z)=\int_{-\sqrt[4]{z}}^{\sqrt[4]{z}}\frac{1}{6}\,dx=\frac{1}{6}\cdot 2\sqrt[4]{z}=\frac{\sqrt[4]{z}}{3}.$$

③当$16\leq z<256$时，$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(X^4\leq z)=P(-2\leq X\leq\sqrt[4]{z})$。由于$X\sim U(-2,4)$，

其概率密度函数为$f_X(x)=\dfrac{1}{6}$，在$(-2\leq x\leq 4)$时

，所以

$$F_Z(z)=\int_{-2}^{\sqrt[4]{z}}\frac{1}{6}\,dx=\frac{1}{6}\cdot(\sqrt[4]{z}+2)=\frac{\sqrt[4]{z}+2}{6}.$$

④当 $z\geq 256$时，$F_Z(z)=P(Z\leq z)=1$

综上所述，(Z) 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0 & \text{if } z<0,\\ \dfrac{\sqrt[4]{z}}{3} & \text{if } 0\leq z<16,\\ \dfrac{\sqrt[4]{z}+2}{6} & \text{if } 16\leq z<256,\\ 1 & \text{if } z\geq 256.\end{cases}$$

对$F_Z(z)$求导，得到（Z）的密度函数 $f_Z(z)$。

当$0 \leq z < 16$时，

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{\sqrt[4]{z}}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} z^{-3/4} = \frac{1}{12} z^{-3/4}.$$

当$16 \leq z < 256$时，

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{\sqrt[4]{z}+2}{6}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} z^{-3/4} = \frac{1}{24} z^{-3/4}.$$

当$z < 0$或$z \geq 256$时，$f_Z(z) = 0$。

综上所述，（Z）的密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{12} z^{-3/4} & \text{if } 0 \leq z < 16, \\ \frac{1}{24} z^{-3/4} & \text{if } 16 \leq z < 256, \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

3. 计算 $P(H > 1|H > 0)$

$$\begin{aligned} P(H > 1) &= P(X + 1 > 1 \mid A = 1)P(A = 1) + P(X > 1 \mid A = 0)P(A = 0) \\ &= P(X > 0) \cdot 0.2 + P(X > 1) \cdot 0.8 = \frac{2}{3} \cdot 0.2 + \frac{1}{2} \cdot 0.8 = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

$$P(H > 0) = P(X > -1) \cdot 0.2 + P(X > 0) \cdot 0.8 = \frac{2}{3} \cdot 0.2 + \frac{1}{2} \cdot 0.8 = \frac{5}{6} \cdot 0.2 + \frac{2}{3} \cdot 0.8 = \frac{7}{10}$$

$$P(H > 1|H > 0) = \frac{P(H > 1)}{P(H > 0)} = \frac{16}{21}$$

三

设 a 是一个数，二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数是

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x + y), & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

> **楼主觉得这题顺序不太对。应该先求a，再做1-4问**
>
> **先求a：**
>
> $$\int_0^1 \int_0^y a(x + y)\, dx\, dy = 1$$
> $$\int_0^1 \int_0^y a(x + y)\, dx\, dy = a \int_0^1 dy \int_0^y (x + y)\, dx = \frac{3}{2} y^2$$
> $$a \int_0^1 \frac{3}{2} y^2\, dy = \frac{a}{2} = 1 \implies a = 2$$

1. **设 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$，求 $F(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$**

   积分区域 $0 \leq X \leq Y \leq \frac{1}{2}$：

   $$F\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^y 2(x + y)\, dx\, dy$$

   计算内层积分：$\int_0^y (x + y)\, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + yx\right]_0^y = \frac{3}{2} y^2$

$$2\int_0^{1/2} \frac{3}{2}y^2\,dy = 3\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{8}$$

2. 求 X, Y 各自的边际密度函数

   $$f_X(x) = \int_x^1 2(x+y)\,dy = 2\left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)|_x^1 = 2x + 1 - 3x^2$$

   $\displaystyle f_Y(y) = \int_{0}^{y} 2(x+y) \, dx = \left. \ 2 \left(\dfrac{1}{2}x^2 + yx \right) \right|_0^y = 3y^2 $

3. 判断 X, Y 是否独立， 需说明理由

   若独立，则$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) $

   但$f(x,y) = 2(x+y) \neq (2x+1-3x^2)\cdot(3y^2) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$

   故X, Y不独立

4. 求 $P(X > \dfrac{1}{4}|Y = \dfrac{1}{2})$

   $$f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \frac{f(x,\frac{1}{2})}{f_Y\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2(x+\frac{1}{2})}{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4(2x+1)}{3}$$

   $$P\left(X > \frac{1}{4}\middle|Y = \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{4(2x+1)}{3}\,dx = \frac{4}{3}\cdot\frac{7}{16} = \frac{7}{12}$$

5. 求 a

   见引用部分

四

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ **独立同分布**， $P(X_1 = 1) = 0.4,\ P(X_1 = 2) = P(X_1 = 3) = 0.3$

令 $M = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_{10}\},\ N = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_{10}\},$ **求**

1. N **的分布律**

   答：N的可能取值是$1, 2, 3$

   $P(N = 1) = 1 - P(N \geq 2) = 1 - 0.6^{10}$

   $P(N = 2) = P(N \geq 2) - P(N \geq 3) = 0.6^{10} - 0.3^{10}$

   $P(N = 3) = P(N \geq 3) = 0.3^{10}$

2. **给定** $\{N = 1\}$ **的条件下** M **的条件分布**

   答：M的可能取值是$1, 2, 3$

   $$P(M = 1|N = 1) = \frac{P(M = 1, N = 1)}{P(N = 1)} = \frac{0.6^{10}}{1 - 0.6^{10}}$$

   $$P(M = 2|N = 1) = \frac{P(M = 2, N = 1)}{P(N = 1)} = \frac{0.7^{10} - 0.6^{10}}{1 - 0.6^{10}}$$

$$P(M=3|N=1)=1-P(M=1|N=1)-P(M=2|N=1)=\frac{1-0.7^{10}-0.6^{10}}{1-0.6^{10}}$$

最后一题答案修改一下:

max=1，min=1时概率是0.4的十次方
max=2，min=1的概率是0.7的十次方-0.4的十次方（全部是1）-0.3的十次方（全部是2）
max=3，min=1的概率是1-0.7的十次方（1,2混合）-0.6的十次方（2，3混合）+0.3的十次方