1. (1) 计算 EX，EY，$E(XY)$ 和 $Cov(X,Y)$

   - 计算 EX：
   - 先求 X 的边缘概率密度 $f_X(x)$：

   $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 3xdy=3x^2$，$0<x<1$；$f_X(x)=0$，其他。

   - 根据期望公式 $EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 x\cdot 3x^2dx=\frac{3}{4}$。
   - 计算 EY：
   - 先求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$：

   $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}(1-y^2)$，$0<y<1$；$f_Y(y)=0$，其他。

   - 根据期望公式 $EY=\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1 y\cdot\frac{3}{2}(1-y^2)dy=\frac{3}{8}$。
   - 计算 $E(XY)$：
   - 根据期望公式 $E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^x xy\cdot 3xdydx$
   - 先对 y 积分：$\int_0^1 x\cdot 3x[\frac{1}{2}y^2]_0^x dx=\int_0^1\frac{3}{2}x^4dx=\frac{3}{10}$。
   - 计算 $Cov(X,Y)$：
   - 根据协方差公式 $Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$，将 $EX=\frac{3}{4}$，$EY=\frac{3}{8}$，$E(XY)=\frac{3}{10}$ 代入得：

   $Cov(X,Y)=\frac{3}{10}-\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{10}-\frac{9}{32}=\frac{48-45}{160}=\frac{3}{160}$。

2. (2) 判断 X 和 Y 是否不相关

   - 因为 $Cov(X,Y)=\frac{3}{160}\neq 0$，根据不相关的定义（若 $Cov(X,Y)=0$，则 X 和 Y 不相关），所以 X 和 Y 相关。

3. (3) 计算 EZ，其中 $Z=\max(X,0.5)$

   - 根据期望公式 $EZ=\int_{-\infty}^{\infty}\max(x,0.5)f_X(x)dx$
   - 分情况讨论：

   当 $0<x<0.5$ 时，$\max(x,0.5)=0.5$；当 $0.5\leq x<1$ 时，$\max(x,0.5)=x$。

   $EZ=\int_0^{0.5}0.5\times 3x^2dx+\int_{0.5}^1 x\times 3x^2dx$

   - 计算积分：

   $\int_0^{0.5}0.5\times 3x^2dx=0.5\times[x^3]_0^{0.5}=\frac{1}{16}$

   $\int_{0.5}^1 3x^3dx=[\frac{3}{4}x^4]_{0.5}^1=\frac{3}{4}(1-\frac{1}{16})=\frac{45}{64}$

   $EZ=\frac{1}{16}+\frac{45}{64}=\frac{4+45}{64}=\frac{49}{64}$。

4. (1) 计算 $P(2X_1+1>Y_1)$

   - 已知 $X_1\sim N(2,1)$，$Y_1\sim N(1,4)$，设 $Z=2X_1-Y_1+1$。
   - 根据正态分布的线性组合性质：若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $\mathrm{Corr}(X,Y)=\rho$，则

$aX + bY + c \sim N(a\mu_1 + b\mu_2 + c, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\rho\sigma_1\sigma_2)$。

这里 $a = 2$，$b = -1$，$c = 1$，$\mu_1 = 2$，$\sigma_1^2 = 1$，$\mu_2 = 1$，$\sigma_2^2 = 4$，$\rho = 0.5$。

- 计算 Z 的期望 $E(Z) = 2 \times 2 - 1 \times 1 + 1 = 4$。
- 计算 Z 的方差 $D(Z) = 2^2 \times 1 + (-1)^2 \times 4 + 2 \times 2 \times (-1) \times 0.5 \times 1 \times 2 = 4 + 4 - 4 = 4$。

所以 $Z \sim N(4, 4)$，则 $P(2X_1 + 1 > Y_1) = P(Z > 0) = 1 - P(Z \leq 0)$。

- 标准化 Z，令 $U = \frac{Z-4}{2} \sim N(0,1)$，$P(Z \leq 0) = P(U \leq \frac{0-4}{2}) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$，$\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数，查标准正态分布表 $\Phi(2) \approx 0.9772$，所以

$P(2X_1 + 1 > Y_1) = \Phi(2) \approx 0.9772$。

5. (2) 求 $n \to \infty$ 时，$\frac{Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}$ 依概率收敛的值

- 由大数定律：

因为 $X_i \sim N(2,1)$，根据大数定律 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} E(X_1) = 2$（依概率收敛）。

对于 $Y_i \sim N(1,4)$，先求 $E(Y_i^2) = D(Y_i) + [E(Y_i)]^2 = 4 + 1 = 5$，根据大数定律

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \xrightarrow{P} E(Y_1^2) = 5$。

则 $\frac{Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i} \xrightarrow{P} \frac{5}{2}$。

6. (3) 求 $|X_1 - 2| + |X_2 - 2| + \cdots + |X_{10000} - 2|$ 近似服从的分布

- 已知 $X_i \sim N(2,1)$，则 $X_i - 2 \sim N(0,1)$。

设 $Z_i = |X_i - 2|$，先求 $E(Z_i)$ 和 $D(Z_i)$：

$E(Z_i) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\int_0^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$，令 $t = \frac{x^2}{2}$，$dt = xdx$，则 $E(Z_i) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$。

$E(Z_i^2) = E((X_i - 2)^2) = D(X_i) = 1$，$D(Z_i) = E(Z_i^2) - [E(Z_i)]^2 = 1 - \frac{2}{\pi}$。

由中心极限定理，当 $n = 10000$ 时，$\sum_{i=1}^{10000} Z_i$ 近似服从正态分布 $N(nE(Z_i), nD(Z_i))$。

$nE(Z_i) = 10000\sqrt{\frac{2}{\pi}}$，$nD(Z_i) = 10000(1 - \frac{2}{\pi})$。

所以 $|X_1 - 2| + |X_2 - 2| + \cdots + |X_{10000} - 2|$ 近似服从 $N(10000\sqrt{\frac{2}{\pi}}, 10000(1 - \frac{2}{\pi}))$。