概统第三次小测整理（附答案）

单选：

1.

1. 设X_1，…，X_6相互独立同服从标准正态分布，以下选项正确的是

单选题(10 分)

○ A. $\dfrac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2+\dots+X_6^2} \sim F(2,4)$.

○ B. $\dfrac{1}{6}(3X_1-X_2-X_3-X_4)^2 \sim \chi^2(1)$.

◉ C. $\dfrac{1}{2}[(X_1-X_2)^2+(X_3-X_4)^2+(X_5-X_6)^2] \sim \chi^2(3)$.

○ D. $\dfrac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{X_4^2+X_5^2}} \sim t(2)$.

答案：C

解析：

A.应为$\frac{{X_1}^2+{X_2}^2/2}{{X_3}^2+\dots+{X_6}^2/4} \sim F(2,4)$

B.$Z=3X_1-X_2-X_3-X_4 \sim N(0,1)$

故应为$\frac{Z^2}{12} \sim \chi^2(1)$

D.应为$\frac{X_1+X_2+X_3/\sqrt{3}}{\sqrt{{X_4}^2+{X_5}^2/2}} \sim t(2)$

2.

2. 设随机变量X的分布律为$P(X=0)=0.3, P(X=1)=0.2, P(X=2)=0.3, P(X=3)=0.2$. 对$X$独立重复观测775次，结果记为$X_1, \dots, X_{775}$，则 $P(1023<\sum_{i=1}^{775}X_i<1147)\approx$

单选题(10 分)

◉ A. 0.9544.

○ B. 0.9772.

○ C. 0.6826.

○ D. 0.8413.

答案：A

解析：

$E(X_i)=1.4$

$D(X_i)=1.24$

由林德伯格——莱维中心极限定理$P(1023<\sum_{i=1}^{775}X_i<1147)=P(\frac{-62}{\sqrt{1.24\times775}}\le\frac{\sum_{i=1}^{775}X_i-1085}{\sqrt{1.24\times775}}\le\frac{62}{\sqrt{1.24\times775}})=2\Phi(2)$

3.

3. 设$X_1, X_2, \dots, X_{100}$都服从参数为2的泊松分布，且相互独立，由中心极限定理得随机变量 $\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{100}X_i$ 近似服从

单选题(10 分)

○ A. N(20,1).

◉ B. N(20,2).

○ C. N(20,10).

○ D. N(20,20).

答案：B

解析：

$$E(\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{100}X_i)=20$$

$$D(\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{100}X_i)=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}D(X_i)=2$$

4.

4. 设总体X的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{8\theta^2}{x^3}, & x\geq 2\theta,\\ 0, & x<2\theta.\end{cases}$ 其中$\theta>0$是未知参数，$X_1,\dots,X_n$是总体X的简单随机样本，则θ的极大似然估计量是

单选题(10 分)

- ○ A. $\max(X_1,\dots,X_n)$.
- ○ B. $\max(X_1,\dots,X_n)/2$.
- ◉ C. $\min(X_1,\dots,X_n)/2$.
- ○ D. $\min(X_1,\dots,X_n)$.

答案：C

解析：

$$L(\theta)=\frac{(8\theta^2)^n}{\prod X^3}=\quad 2^{3n}\theta^{2n}X_1^{-5}\cdots X_n^{-3}$$

$$\ln L(\theta)=3n\ln 2+2n\ln\theta-3[\sum_{i=1}^{n}\ln X_i]$$

θ越大，$\ln L(\theta)$越大，但$2\theta\leq\chi_{\min}=>\theta\leq\frac{\chi_{\min}}{2}$

5.

5. 设$X_1,X_2,\dots,X_{960}$相互独立服从相同分布，X_1的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{12}, & 1<x<5,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ Y表示$\{X_1<4\},\{X_2<4\},\dots,\{X_{960}<4\}$出现的个数，则$P(Y>630)$

≈

单选题(10 分)

- ○ A. 0.8413.
- ○ B. 0.1587.
- ○ C. 0.9772.
- ◉ D. 0.0228.

答案：D

解析：

$\{x<4\}$出现的概率为$\int_1^4\frac{x}{12}=\frac{5}{8}$

因此符合$P=\frac{5}{8}$的二项分布

由棣莫弗拉普拉斯中心极限定理$\lim_{n\to\infty}p\{\frac{nA-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\leq x\}=\Phi(x)$

带入数据$P(Y>630)=1-\Phi(\frac{630-960\times\frac{5}{8}}{\sqrt{960\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}}})=1-\Phi(2)=0.028$

6.

6. 设$X_1,\dots,X_4$是来自总体$X\sim N(0,\sigma^2)$的样本，$\overline{X}$ 与S^2分别是样本均值和样本方差，X_5是$N(0,\sigma^2)$新增的独立样本. 则 $\frac{2\sqrt{5}}{5}\frac{\overline{X}-X_5}{S}$ 服从的分布是

单选题(10 分)

- ◉ A. t(3).
- ○ B. N(0,1).
- ○ C. t(4).
- ○ D. F(1,4).

答案：A

解析：

$\bar{X} = \frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}$

$\frac{\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4} - X_5}{\sigma\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)} \sim N(0,1)$

$\frac{3S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(3)$

$\frac{\bar{X}-X_5}{\sigma\sqrt{\frac{5}{4}}} / \sqrt{\frac{3S^2}{3\sigma^2}} \sim t(3)$

7.

7. 根据历史数据，某包装流水线包装1000g的糖果，每包的重量视为正态总体. 质检员定期随机抽取16包糖果，在某次抽检中，16包糖果的平均重量为980g，标准差为10g. 则总体均值的置信水平为90%的置信区间为

单选题(10 分)

- A. (975.62，984.38).
- B. (976.65, 983.35).
- C. (976.80，983.20).
- D. (975.89，984.11).

答案：A

解析：

属于单正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，σ^2未知情形，置信区间为：$(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$

查表带入数据得到答案

8.

8. 设总体$X \sim \chi^2(6)$，$X_1, \dots, X_6$是X的简单随机样本，$\bar{X}$ 是样本均值，则以下选项正确的是

单选题(10 分)

- A. $6\bar{X} \sim \chi^2(36)$.
- B. $\bar{X} \sim \chi^2(6)$.
- C. $E(\bar{X}) = 36$.
- D. $Var(\bar{X}) = 12$.

答案：A

解析：

$6\bar{x} = 6\frac{X_1+X_2+\cdots+X_6}{6} = X_1+X_2+\cdots+X_6 \sim \chi^2(6+6+\cdots+6) \sim \chi^2(36)$

9.

2. 设$X_1, X_2, \dots, X_{10}$是来自均值与方差都为2的总体X的简单随机样本， $Y_1=(X_1+\dots+X_4)/4$，$Y_2=(X_5+\dots+X_{10})/6$. 根据切比雪夫不等式，则以下选项正确的是

单选题(10 分)

- A. $P(|Y_2-2|\le 2)\le 1/12$.
- B. $P(|Y_1-Y_2|\le 2)\le 19/24$.
- C. $P(|Y_1-Y_2|\ge 2)\le 5/24$.
- D. $P(|Y_1-2|\ge 2)\le 1/16$.

C

答案：C

解析：

$E(Y_1 - Y_2) = 0$

$D(Y_1 - Y_2) = D(Y_1) + D(Y_2) = \frac{5}{6}$

$E(Y_1) = 2, D(Y_1) = \frac{1}{2}$

$P(|Y_1 - 2| < 2) \ge 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$

$P(|Y_1 - 2| < 2) \ge 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$

$P(|Y_1 - Y_2| \geq 2) = \frac{1}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{24}$

10.

3. 设$(X_1, \ldots, X_5)$和$(Y_1, \ldots, Y_6)$分别来自期望为μ_1, μ_2,方差为${\sigma_1}^2, {\sigma_2}^2$的正态总体$X$与$Y$的两组独立简单随机样本. 样本均值分别为 $\overline{X}, \overline{Y}$,样本方差分别为 S_X^2, S_Y^2 . 若 $P\left\{\dfrac{S_X^2/S_Y^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \geq a\right\}=0.9$ ，则 $a=$

单选题(10 分)

- A. 0.247.
- B. 0.284.
- C. 4.05.
- D. 3.52.

A

答案：A

解析：

$\frac{{S_X}^2/{S_Y}^2}{{\sigma_1}^2/{\sigma_2}^2} \sim F(4,5)$

查表只能查到：$F_{0.1}(5,4)$=4.05

由F分布性质：$F_{1-0.1}(4,5) = F_{0.9}(4,5) = \frac{1}{F_{0.1}(5,4)} = 0.247$

11.

4. 设总体X的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\dfrac{|x|}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}$ ，$-\infty<x<\infty, \theta>0$是未知参数. $X_1, \ldots, X_n$为从总体中抽取的简单随机样本. 则θ的极大似然估计量为

单选题(10 分)

- A. $|\overline{X}|$
- B. $\overline{X}^2$
- C. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$
- D. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i|$

C

答案：C

解析：

$$l(\theta) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} |x_i|}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$$

$$\ln l(\theta) = \sum_{i=1}^{10} \ln|X_i| - n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2$$

$$\frac{d\ln l(\theta)}{d\theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} {X_i}^2}{\theta^2} = 0\text{时}$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2$$

12.

5. 设总体$X \sim U(0, \theta)$, $\theta>0$未知，$(X_1, \ldots, X_n)$为来自该总体的简单随机样本，$n \geq 3$，在估计θ时, 若以均方误差为标准, 以下统计量中最优的是

单选题(10 分)

- A. $\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n)$.
- B. $\frac{2}{n}(X_1+\ldots+X_n)$.
- C. $\frac{n+1}{n}max\{X_1,\ldots,X_n\}$.
- D. $max\{X_1,\ldots,X_n\}$.

C

答案：C

解析：

$Mse(\theta)=D(\theta)+(E\hat{\theta}-\theta)^2$

A. $Mse(\hat{\theta}_1)=D(\hat{\theta}_1)=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\theta^2}{12n}$

B. $Mse(\hat{\theta}_2)=D(\hat{\theta}_2)+(E\hat{\theta}_2-\theta)^2=\frac{4\sigma^2}{n}+\theta^2=\frac{\theta^2}{3n}+\theta^2$

D. 令$U=\max\{X_1,\dots,X_n\}$，$F_U(x)=F(x)^n=(\frac{x}{\theta})^n$

$f_U(x)=(F_U(x^n))'=\frac{nx^{n-1}}{n^n}$

$E\left[\max\{X_1,\dots X_i\}\right]=\int_0^\theta\frac{nx^{n-1}}{\theta^m}xdx=\frac{n\theta}{n+1}$

$E\left[\max\{X_1,\dots X_i\}^2\right]=\int_0^\theta\frac{nx^{n-1}}{\theta^m}x^2dx=\frac{n\theta^2}{n+2}$

$D\left[\max\{X_1,\dots X_i\}^2\right]=\frac{n\theta^2}{n+2}-\left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2=\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$

$Mse(\hat{\theta}_4)=\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}+(\frac{\theta}{n+1})^2=\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$

C. $E\left[\frac{n+1}{n}\max\{X_1,\dots X_i\}\right]=\frac{n\theta}{n+1}\frac{n+1}{n}=\theta$

$Mse(\hat{\theta}_3)=D(\hat{\theta}_3)=\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}\times\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$

13.

6. 设$\{X_i, i\geqslant 1\}$为独立同分布的随机变量序列，若$E(X_1)=\theta$，$Var(X_1)=\theta^2$. 则当$n\to+\infty$时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-2\theta)^2$ 依概率收敛到

单选题(10 分)

A. $5\theta^2$.

B. θ^2.

C. $4\theta^2$.

D. $2\theta^2$.

D

答案：D

解析：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-2\theta)^2\xrightarrow{P}E[(X-2\theta)^2]=E(x^2+4\theta^2-2\theta x)=E(X^2)+4\theta^2-4\theta E(x)=D(X)+[E(x)]^2+4\theta^2-4\theta^2=2\theta^2$$

14.

6. 设某群体的体质指标BMI值是服从正态分布，均值为22.4，标准差为2.5. 现在该群体中抽取了16位，则这16位的人均BMI值大于23的概率为

单选题(10 分)

A. 0.5948.

B. 0.4052.

C. 0.1685.

D. 0.8315.

C

答案：C

解析：

$$P(\bar{X}>23)\Rightarrow P(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i>23)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(22.4,\frac{2.5^2}{16})$$

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-22.4}{\sqrt{\frac{2.5^2}{16}}}\sim N(0,1)$$

$$P=1-\Phi(\frac{23-22.4}{\frac{2.5}{4}})=1-\Phi(0.96)=1-0.8315=0.1685$$

15.

8.

设$X_1,X_2,\dots,X_{200}$相互独立服从相同分布，X_1的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{1-x^2}{2}, & -1\le x<0,\\ \frac{1+x^2}{2}, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$ 则 $P(|\sum_{i=1}^{200}X_i|>10)\approx$

单选题(10 分)

- A. 0.1587.
- B. 0.3174.
- C. 0.8413.
- D. 0.6826.

B

答案：B

解析：

$$E(X_i)=\int_{-1}^{0}(-x)xdx+\int_0^1 xxdx=0$$

$$E(X_i^2)=\int_{-1}^{0}(-x)x\,dx+\int_0^1(x)x^2dx=\frac{1}{2}$$

$$D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=\frac{1}{2}$$

由林德伯格——莱维中心极限定理：

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{200}X_i-200}{\frac{1}{3}\sqrt{200}}\le x\right\}=\Phi(x)$$

带入数据：

$$2(1-\Phi(\frac{10}{\frac{1}{2}\sqrt{200}}))=0.3174$$

$$P(|\sum_{i=1}^{200}X_i|>10)=0.8413$$

16.

2.

设总体X的概率密度函数 $f(x;\lambda)=\begin{cases}\frac{\lambda x^{\lambda-1}}{4^\lambda}, & 0<x<4,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ $\lambda>0$为未知参数，$X_1,\dots,X_n$是总体X的简单随机样本，$x_1,\dots,x_n$是样本值，则以下选项正确的是

单选题(10 分)

- A. λ的极大似然估计量是λ的相合估计量.
- B. $\overline{X}$是λ的无偏估计量.
- C. 似然函数 $L(\lambda)=\frac{\lambda^n x^{n(\lambda-1)}}{4^{n\lambda}}$.
- D. λ的极大似然估计量为 $\frac{1}{\ln4-\ln(\overline{X})}$.

A

答案：A

解析：

C显然错

$$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-n\lambda\ln4+(\lambda-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-2n\frac{1}{\ln2}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0时$$

$$\hat{\lambda}=\frac{n}{2n\ln2-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}=\frac{1}{1n4-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}=\frac{1}{1n4-\overline{\ln X}}$$

故D错

$$E(\frac{1}{\ln4-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i})=\frac{1}{\ln4-E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i)}$$

$E(\frac{1}{n}\ln X_i)=\int_0^4\frac{\lambda x^{\lambda-1}}{4^\lambda}\ln xdx=\ln4-\frac{1}{\lambda}$ (运用分部积分技巧)

$E(\frac{1}{\ln 4-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}) = \frac{1}{\ln 4-\ln 4+\frac{1}{\lambda}} = \lambda$

所以极大似然估计量为相合估计量，选A

17.

4. 二元正态总体$(X,Y)\sim N(0,0,\sigma^2,4\sigma^2,0.5)$, $\sigma>0$未知. 从中抽取了简单随机样本$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\dots,(X_n,Y_n)$, $n\geq 2$. 当$n\to\infty$时, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)^2$ 依概率收敛到

单选题(10 分)

A. σ^2.

B. $5\sigma^2$.

C. $3\sigma^2$.

D. $4\sigma^2$.

C

答案：C

解析：

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)^2 \xrightarrow{P} E\left[(X_i-Y_i)^2\right] = D[X_i-Y_i]+E[X_i-Y_i]^2$

$D[X_i-Y_i] = D(X_i)+D(X_i)-2Cov(X_i,Y_i) = \sigma^2+4\sigma^2-2\times 0.5\times\sigma\times\sigma = 3\sigma^2$

$E[X_i-Y_i]^2 = 0$

所以依概率收敛于$3\sigma^2$

18.

1.设X_1，X_2，...，X_n，...相互独立，同服从均值为4的指数分布，则当$n\to+\infty$时，$\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}e^{-X_i}$依概率收敛到

A.$e^{-1/4}$

B.$1/5$

C.$4/5$

D.e^{-4}

B

答案：B

解析：

由辛钦大鼠定理，$E(e^{-x}) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{5}{4}x}dx = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \to E(e^{-x}) = \frac{1}{5}$

19.

2.设总体X的概率分布律为$P(X=1)=\theta^2$，$P(X=2)=2\theta(1-\theta)$，$P(X=4)=(1-\theta)^2$，其中$\theta(0<\theta<1)$为未知参数，样本X_1，X_2，X_3，X_4，X_5的观测值为$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=1$，$x_4=1$，$x_5=4$，则θ的极（最）大似然估计值为

A.$3/10$

B.$4/5$

C.$7/10$

D.$1/2$

C

答案：C

解析：

$L(\theta) = (\theta^2)^3 2\theta(1-\theta)(1-\theta)^2 = 2\theta^7(1-\theta)^3$

$lnL(\theta) = \ln 2+7\ln\theta+3\ln(1-\theta)$

$\frac{dlnL(\theta)}{d\theta} = \frac{7}{\theta}-\frac{3}{1-\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{7}{10}$

20.

1.设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ，σ^2均为未知参数，从总体中抽取容量为16的简单随机样本，测得样本均值为6.75，样本方差为2.25，则σ^2的置信度为95%的双侧置信区间是

A.$(5.951, 7.549)$

B.$(6.094, 7.406)$

C.$(1.228, 5.390)$

D.$(0.818, 3.594)$

C

答案：C

解析：

$\bar{X} = 6.75$

$S^2 = 2.25$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(15)$

置信区间为$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}{}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2(n-1)}\right) = (1.228, 5.389)$，选C

21.

3.设总体$X \sim U(1, 1+\theta)$，未知参数$\theta > 0$，设X_1，X_2，...，X_n是总体X的简单随机样本，$\overline{X}$是样本均值，则下列估计量中是θ的相合估计量的是

A.$2(\overline{X} - 1)$

B.$2(X_n - 1)$

C.$\overline{X} - 1$

D.$X_n - 1$

A

答案：A

解析：

$E(2\bar{X} - 2) = 2E(\bar{X}) - 2 = 2E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) - 2 \xrightarrow{P} 2E(X) - 2 = \theta$，故选A

22.

8.设总体$X \sim N(0, 1)$，X_1，...，X_5是X的简单随机样本，$\overline{X}$，S^2分别是样本均值和样本方差，则$Var[(\overline{X})^2 - S^2] =$

A.$1/2$

B.$29/50$

C.$2/5$

D.$9/10$

B

答案：B

解析：

由正态分布性质$\overline{X}, S^2$相互独立

$Var[(X)^2 - S^2] = Var[(\bar{X})^2] + Var[(S^2)]$

$\frac{\overline{X}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \sim N(0, 1)$，令$Z = \sqrt{5}\overline{X}$，所以有$Z^2 \sim \chi^2(1)$

$Var(Z^2) = 10$，$Var(\overline{X}^2) = \frac{2}{25}$，$4S^2 \sim \chi^2(4)$，$Var(S^2) = \frac{2\times 4}{16} = \frac{1}{2}$

所以$Vae\left[(\bar{X})^2 + S^2\right] = \frac{2}{25} + \frac{1}{2} = \frac{29}{50}$

23.

2. 设 $(X_1, ..., X_5)$和$(Y_1, ..., Y_6)$分别来自期望为μ_1,μ_2，方差为σ_1^2,σ_2^2的正态总体X与Y的两组独立简单随机样本，样本均值 $\overline{X}, \overline{Y}$ 的观测值分别为1.2和1.5，样本方差 S_X^2, S_Y^2 的观测值分别为3.6和4.5，则 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为0.9的单侧置信下限为

单选题(10 分)

- A. 0.1975
- B. 0.2273
- C. 0.2572
- D. 0.2353

答案：B

解析：

$$\frac{S_1{}^2/S_2{}^2}{F_\alpha(n_1-1,n_2-1)} = \frac{3.6/4.5}{-F_{0.1}(4,5)} = 0.2273$$

多选：

1.

9. 设随机变量X的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}3x^2, 0<x<1,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$ 对X独立重复观测960次，结果记为$X_1, ..., X_{960}$. 则以下选项正确的有

多选题(10 分)

- A. Var (X)=3/80.
- B. $P(X_1+...+X_{960}>708)\approx0.9772$.
- C. $E(X)$=3/4.
- D. $(X_1+...+X_{960}-720)/36$近似服从标准正态分布.

答案：

ABC

解析：

$E(x)=\int_0^1 3x^2dx=\frac{3}{4}$，C对

$E(x^2)=\int_0^1 3x^2x^2dx=\frac{3}{5}$

$D(x)=E(x^2)-E(x)^2=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}$，A对

由中心极限定理 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\le x)=\Phi(x)$

$P(\sum_{i=1}^{n}X_i>708)=1-\Phi(\frac{708-960\times\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{3}{80}\times960}})=1-\Phi(-2)=\Phi(2)=0.9773$，C对

$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-720}{6}\sim N(0,1)$，D错

2.

10. 设总体X~U(0, 2θ), θ>0未知，X_1, X_2, X_3是总体X的简单随机样本，则以下关于θ的估计量中方差计算正确的选项有

多选题(10 分)

- A. Var[$(X_1+X_2)/2$]= $3\theta^2/4$.
- B. Var[($X_1+X_2+X_3)/3$]= $\theta^2/3$.
- C. Var[$(X_1+2X_2-X_3)/2$]=$\theta^2/2$.
- D. Var[$(2X_1+X_3)/3$]=$5\theta^2/27$.

答案：CD

解析：

A. $Var[\frac{x_1+x_2}{2}] = \frac{1}{4}Var(x_1+x_2)$

$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$E(x^2) = \frac{1}{2\theta}\int_0^{2\theta} x^2 dx = \frac{1}{2\theta} \times \frac{1}{3} \times (8\theta)^3 = \frac{4\theta^2}{3}$

$E(x) = \frac{1}{2\theta}\int_0^{2\theta} x dx = \theta$

$Var(X) = \frac{\theta^2}{3}$

$Var[\frac{X_1+X_2}{2}] = \frac{1}{4}[Var(X_1)+Var(X_2)] = \frac{\theta^2}{6}$，故A错

B. $Var\left[(X_1+X_2+X_3)/3\right] = \frac{1}{9} \times 3 \times \frac{\theta^2}{3} = \frac{\theta^2}{9}$,故B错

$C. Var[(X_1+2X_2-X_3)/2] = \frac{1}{4}[Var(X_1)+4Var(X_2)+Var(X_3)] = \frac{1}{4} \times \frac{\theta^2}{3} \times 6 = \frac{\theta^2}{2}$，故C对

$D. Var[(2x_1+x_3)/3] = \frac{\theta^2}{3} \times \frac{1}{9} \times 5 = \frac{5\theta^2}{27}$，故D对

3.

9. $t_\alpha(n)$表示自由度为n的t分布的上α分位数，$F_\alpha(n,m)$表示自由度为(n,m)的F分布的上α分位数，下列结论中成立的有

多选题(10 分)

- ☐ A. $t_{0.5}(n)=0$.
- ☐ B. $F_{0.05}(1,n)=t^2_{0.025}(n)$
- ☐ C. $F_{0.5}(n, n)=1$.
- ☐ D. $F_{0.1}(10,15)F_{0.1}(15,10)=1$.

ABC

答案：ABC

解析：

A. t分布图像关于y轴对称，故A对

B. 由$X \sim t(n)$，$X^2 \sim F(1,n)$

且$t_{0.025(n)} = -t_{0.975}(n)$

$F_{0.05}(1,n) = {t_{0.05}}^2(n)$，故B对

C. $F_{0.5}(n,n) = \frac{1}{F_{0.5}(n,n)} => F_{0.5}(n,n) = 1$，故C对

D. $F_{0.1}(10,15) = \frac{1}{F_{1-0.1}(15,10)}$，故D错

4.

10. 设总体X的概率密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3}, 0<x<\theta, \\ 0, \quad 其他.\end{cases}$ $\theta>0$为未知参数，从总体抽取容量为n的简单随机样本$X_1, X_2, ..., X_n$，$\bar{X}, A_2, B_2$分别为样本均值、样本二阶原点矩和样本二阶中心矩，则以下估计量中是θ的矩估计量的有

多选题(10 分)

- ☐ A. $\sqrt{\frac{80}{3}B_2}$.
- ☐ B. $\frac{4}{3}\overline{X}$.
- ☐ C. $\max(X_1, X_2,..., X_n)$.
- ☐ D. $\sqrt{\frac{5}{3}A_2}$.

ABD

答案：ABD

解析：

$\mu_1 = A_1 \Rightarrow 2\int_0^\theta \frac{3x^2}{\theta^2} x dx \Rightarrow \frac{3}{4}\hat{\theta} = \bar{X} => \theta = \frac{4}{3}\bar{X}$,故B对

$\mu_2 = A_2 \Rightarrow 2\int_0^\theta \frac{3x^2x^2}{\theta^3} dx \Rightarrow \frac{3}{5}\hat{\theta}^2 = A_2 => \hat{\theta} = \sqrt{\frac{3}{5}A_2}$，故D对

$\upsilon_2 = B_2 \Rightarrow \hat{\theta} = \sqrt{\frac{80}{3}B_2}$，A对

5.

9.

设总体X的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2\theta^2}{x^3}, x\ge\theta,\\ 0, \quad x<\theta.\end{cases}$ 其中$\theta>0$是未知参数，$X_1, X_2, ..., X_n$是总体X的简单随机样本. 则以下选项正确的有

多选题(10 分)

- [ ] A. $(X_1+X_2+...+X_n)/(2n)$是θ的无偏估计量.
- [ ] B. $(X_1+X_2+...+X_n)/(2n)$方差不存在.
- [ ] C. $(X_1+X_2+...+X_n)/(2n)$是θ的矩估计量.
- [ ] D. $(X_1+X_2+...+X_n)/(2n)$是θ的相合估计量.

ABCD

答案：ABCD

解析：

A. $E(\frac{X_1+...X_n}{2n}) = \frac{n}{2n}\int_\theta^{+\infty}\frac{2\theta^2}{x^3}xdx = \theta^2\times\frac{1}{x}|_{+\infty}^{\theta} = \theta$，所以无偏，故A对

B. $D(\frac{X_1+...X_n}{2n}) = \frac{1}{4n^2}\times nD(X) = \frac{D(X)}{4n}$，$E(X^2) = \int_\theta^{+\infty}\frac{2\theta^2}{x^3}x^2dx = 2\theta^2\int_\theta^{+\infty}\frac{1}{x}dx$不存在

故方差不存在，B对

C. $\int_\theta^{+\infty}\frac{2\theta^2}{x^3}xdx = 2\theta^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = 2\theta \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{2n}$，故C对

D. $\lim_{n\to+\infty}(\frac{X_1+...+X_n}{2n}) \xrightarrow{P} \frac{\mu}{2} = \theta$，所以是相合估计量，D对

6.

10. 设总体$X\sim U(\theta, 3\theta)$, $\theta>0$未知，X_1, X_2, X_3是总体X的简单随机样本，则θ的无偏估计量有

多选题(10 分)

- [ ] A. $(5X_1+4X_2-3X_3)/6$.
- [ ] B. $(2X_1+5X_2-X_3)/6$.
- [ ] C. $(X_1+X_2+X_3)/6$.
- [ ] D. $(2X_1+2X_2-X_3)/6$.

CD

、

答案：CD

解析：懒得写了（qwq）

7.

9. 设总体$X\sim B(4, p)$, $0<p<1$未知，从总体中抽取容量为n的简单随机样本$X_1, X_2, ..., X_n$，$\overline{X}$ 为样本均值. 则以下选项正确的有

多选题(10 分)

- [ ] A. X的方差的极大似然估计为 $4\overline{X}(1-\overline{X})$.
- [ ] B. $P(X\ge3)$的极大似然估计为 $(\overline{X})^3(16-3\overline{X})/256$.
- [ ] C. $P(X=1)$的极大似然估计为 $\overline{X}(4-\overline{X})^3/64$.
- [ ] D. p的极大似然估计为 $\overline{X}$.

BC

答案：BC

解析：

$D(x) = 4P(1-P)$

$L(P) = \prod_{i=1}^{n}\left(C_4^{x_i}P^{x_i}(1-P)\right)^{4-x_i}$

$\ln L(P) = \sum_{i=1}^{n}\ln C_4^{x_i} + \sum_{i=1}^{n}x_i\ln P + \sum_{i=1}^{n}(4-x_i)\ln(1-P)$

$\frac{d\ln L(P)}{dP} = 0 \Rightarrow \hat{P} = \frac{\bar{X}}{4}$

应用极大似然不变性原理：若$\theta^* = g(\theta)$，那么θ^*的极大似然估计量$\hat{\theta}^* = g(\hat{\theta})$

所以方差的极大似然估计为$4\hat{P}(1-\hat{P})$，AD均错

$P(X\geq 3)=\hat{P}^4+4\hat{P}^3(1-\hat{P})=\frac{\bar{X}^3}{256}(1-3\bar{X})$，故B对

$P(X=1)=4\hat{P}(1-\hat{P})^3=\frac{\bar{X}}{64}(4-\bar{X})^3$，故D对

8.

10. 总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中μ已知，$\sigma>0$未知，来自该总体的简单随机样本X_1，…，X_n，$n\geq 2$，记其样本均值为$\bar{X}$，样本方差为S^2，样本的二阶中心矩为B_2，则下述说法正确的有

多选题(10 分)

☐ A. $E(\overline{X}\cdot S)=\mu\sigma$.

☐ B. $\frac{nB_2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$.

☐ C. $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

☐ D. $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\sim N(0,1)$.

BCD

特此说明，此题答案目前认为是BC，但我不知道A错哪里了，有uu知道恳请指出并说明理由

BC的解析：

B. $B_2=\frac{n-1}{n}S^2$，$\frac{nB_2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，故B对

C. $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，故C对

D. $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，故D错

9.

9. 设总体$X\sim P(\lambda)$，$\lambda>0$未知，X_1，…，X_n为来自该总体的简单随机样本，$n\geq 2$，记其样本均值为$\overline{X}$，则下列统计量中为参数λ的相合估计的有

多选题(10 分)

☑ A. $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

☑ B. $\overline{X}$.

☐ C. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

☐ D. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

ABC

答案：ABC

解析：

A. $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}=S^2$，$S^2$为$\sigma^2$的相合估计

因为$X\sim P(\lambda)$

所以$\sigma^2=\lambda$，所以S^2为λ相合估计量，故A对

B. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}E(X)=\lambda$，故B对

C. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\times\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}=\lambda$，故C对

D. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}E(X^2)=\lambda^2+\lambda$，故D选项是$\lambda^2+\lambda$的相合估计，D错