25-26 秋冬概统第一次小测题目与答案

ztj

单选题

1. **题目：** 设随机变量 $X \sim U(-1,4)$，若 $P(k < X < 8-k) = 2/5$，则 $k =$

   选项：

   (a) A. 3
   (b) B. 7
   (c) C. 2
   (d) D. 无解

   答案： C. 2

   解析： $X \sim U(-1,4)$，区间长度为 5。$P(k < X < 8-k) = \frac{(8-k)-k}{5} = \frac{8-2k}{5} = \frac{2}{5}$，解得 $k=3$。但需要验证区间是否在定义域内：当 $k=3$ 时，区间为 $(3,5)$，但 X 的最大值为 4，实际有效区间为 $(3,4)$，长度为 1，概率为 1/5，不符合。正确解法应考虑 $8-k \leq 4$，即 $k \geq 2$，代入验证得 $k=2$ 时，区间 $(2,6)$ 的有效部分为 $(2,4)$，长度为 2，概率为 2/5。

2. **题目：** 设随机事件 A, B，满足 $P(AB) > 0, P(B) < 1$，则以下选项正确的是

   选项：

   (a) A. $P(A|B) > P(AB)$
   (b) B. $P(A)P(A|B) = P(AB)$
   (c) C. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
   (d) D. $P(AB) = P(A)P(B)$

   答案： A. $P(A|B) > P(AB)$

   解析： $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$，由于 $P(B) < 1$，有 $P(A|B) > P(AB)$。其他选项不一定成立。

3. **题目：** 设随机变量 x 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} k(2-x), & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

   则 $k =$

   选项：

   (a) A. 1/2
   (b) B. 4

(c) C. 1/4

(d) D. 1/3

答案： C. 1/4

解析： 概率密度函数积分为 1，即 $\int_{-1}^{1} k(2-x)dx = k[2x - \frac{x^2}{2}]_{-1}^{1} = 4k = 1$，故 $k = \frac{1}{4}$。

4. **题目：** 设连续型随机变量 x 的概率密度函数为 $f(x)$，是偶函数，即 $f(x) = f(-x)$，$F(x)$ 是 x 的分布函数，则 $F(-1) =$

   选项：

   (a) A. $1 - F(1)$

   (b) B. 0

   (c) C. $2 - F(1) - 1$

   (d) D. $F(1)$

   答案： A. $1 - F(1)$

   解析： 由 $f(x)$ 是偶函数，有 $F(-1) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt = \int_{1}^{\infty} f(t)dt = 1 - F(1)$。

5. **题目：** 考虑某选择题有四个选项，其中只有一个是正确答案。某考生可能知道正确答案，也可能是乱猜一个。假设此考生知道正确答案的概率为 1/3，而在不知答案的情况时是随机地选择一个答案。如果已知他答对了这道题，则他确实知道正确答案的概率为

   选项：

   (a) A. 1/3

   (b) B. 1/2

   (c) C. 5/6

   (d) D. 2/3

   答案： D. 2/3

   解析： 设 A 为知道答案，B 为答对。$P(A) = \frac{1}{3}$，$P(B|A) = 1$，$P(B|\neg A) = \frac{1}{4}$。由贝叶斯定理：

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\neg A)P(\neg A)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

6. **题目：** 一系统由甲乙两个子系统组成。甲系统正常工作的概率为 0.90，乙系统正常工作的概率为 0.85，在甲失效条件下，乙正常工作的概率为 0.70，则以下选项错误的是

   选项：

   (a) A. 甲失效且乙正常工作的概率为 0.07

   (b) B. 在乙正常工作条件下，甲正常工作的概率大于 0.9

   (c) C. 甲乙至少有一个正常工作的概率为 0.97

   (d) D. 甲乙同时正常工作的概率为 0.765

   答案： D. 甲乙同时正常工作的概率为 0.765

   解析： 设 A: 甲正常工作，B: 乙正常工作。已知 $P(A) = 0.9$，$P(B) = 0.85$，$P(B|\neg A) = 0.7$。

- $P(\neg A) = 0.1$，$P(B \cap \neg A) = P(B|\neg A)P(\neg A) = 0.7 \times 0.1 = 0.07$，A 正确
- $P(A \cap B) = P(B) - P(B \cap \neg A) = 0.85 - 0.07 = 0.78$，D 错误（应为 0.78）
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.9 + 0.85 - 0.78 = 0.97$，C 正确
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.78}{0.85} \approx 0.9176 > 0.9$，B 正确

7. **题目：**设连续型随机变量 x 的分布函数为 $F_X(x)$，令 $Y = 3 - 2X$，则 Y 的分布函数 $F_Y(y) =$

   选项：

   (a) A. $F_X((3-y)/2)$
   (b) B. $1 - F_X((3-y)/2)$
   (c) C. $F_X(3-2y)$
   (d) D. $1 - F_X(3-2y)$

   答案： B. $1 - F_X((3-y)/2)$

   解析： $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(3 - 2X \le y) = P(X \ge \frac{3-y}{2}) = 1 - F_X\left(\frac{3-y}{2}\right)$

8. **题目：**设随机变量 x 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{8}, & 0 \le x < 1, \\ \frac{x^2}{6}, & 1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

   则以下选项正确的是

   选项：

   (a) A. $P(X = 1) = 1/8$
   (b) B. $P(X < 2) = 2/3$
   (c) C. $P(X \le 0) = 0$
   (d) D. $P(X \ge 1) = 1/8$

   答案： B. $P(X < 2) = 2/3$

   解析：

   - A: $P(X = 1) = F(1) - F(1-) = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$，错误
   - B: $P(X < 2) = F(2-) = \frac{2^2}{6} = \frac{2}{3}$，正确
   - C: $P(X \le 0) = F(0) = \frac{1}{8}$，错误
   - D: $P(X \ge 1) = 1 - F(1-) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$，错误

多选题

9. **题目：** 设 x 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.1 + a, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0.4x + b, & 1 < x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

其中 a,b 是两个常数，则以下选项正确的有

选项：

(a) A. $F(1) = F(1.5)$

(b) B. $F(0) = F(0.5)$

(c) C. $a - b = 0.3$

(d) D. $b = 0.4$

答案： B, C

解析： 分布函数右连续：

- 在 $x = 1$: $0.1 + a = 0.4 \times 1 + b$，即 $a - b = 0.3$
- 在 $x = 2$: $0.4 \times 2 + b = 1$，即 $0.8 + b = 1$，$b = 0.2$，$a = 0.5$
- A: $F(1) = 0.6$，$F(1.5) = 0.4 \times 1.5 + 0.2 = 0.8$，不相等，错误
- B: $F(0) = 0.6$，$F(0.5) = 0.6$，相等，正确
- C: $a - b = 0.5 - 0.2 = 0.3$，正确
- D: $b = 0.2$，错误

10. **题目：** 设随机变量 X 的概率分布律为

X	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
p	$1/3$	$1/6$	$1/3$	$1/6$

而随机变量 $Y = 2X - \pi$，$Z = |X - \pi/2|$，$U = \cos(2X - \pi)$，$V = \sin(X - \pi/2)$，则以下分布律正确的有

选项：

(a) A.

Z	0	$\pi/2$	π
P	$1/6$	$1/2$	$1/3$

(b) B.

V	-1	0	1
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

(c) C.

Y	$-\pi$	0	π	2π
P	$1/3$	$1/6$	$1/3$	$1/6$

(d) D.

U	-1	1
P	$2/3$	$1/3$

答案： B, C, D

解析：计算各变量分布：

- $Y=2X-\pi$: 取值为 $-\pi,0,\pi,2\pi$，概率为 $1/3,1/6,1/3,1/6$，选项 C 正确
- $Z=|X-\pi/2|$: 取值为 $0,\pi/2,\pi$，概率为 $1/6,2/3,1/6$，选项 A 错误（给出的概率为 $1/6,1/2,1/3$）
- $U=\cos(2X-\pi)$: 取值为 $-1,1$，概率为 $2/3,1/3$，选项 D 正确
- $V=\sin(X-\pi/2)$: 取值为 $-1,0,1$，概率为 $1/3,1/3,1/3$，选项 B 正确

上文是cc98:左提嘉的稿子，以下补充来自cc98:沈谛夫King的帖子：

3. 设随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ x/2, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$则以下正确的选项是

单选题

A. $P(X\ge 1)=0.5$

B. $P(X=2)=1$

C. $P(X<2)=0.5$

D. $P(X=1)=0.5$

4. 设A,B,C为三个相互独立事件，记$P(A)=a$，$P(B)=b$，$P(C)=c$，$abc>0$，则以下选项正确的是

单选题

A. $P((A\cup B)(A\cup C))=(a+b-ab)(a+c-ac)$

B. $P(AB|AC)=b$

C. $P(AB\cup C)=ab+c$

D. $P(A\cup B\cup C)=a+b+c$

6. 有八张卡片，其中有两张有特别标识，抽到此种卡片表示获奖，现有八个人依次不放回各抽得一张卡片。则以下选项正确的是

单选题

A. 第四个人获奖的概率为$1/4$

B. 第八个人获奖的概率为1

C. 第二个人获奖的概率是$1/7$

D. 第一个人获奖的概率为1

9. 已知$X \sim U(0,4)$，令$Y = \begin{cases} 2, & X \le 1, \\ X, & 1 < X < 2, \\ 1, & X \ge 2. \end{cases}$ $F_Y(y)$是Y的分布函数，则以下选项正确的有

多选题

A. $F_Y(1.5) = 7/8$

B. $P(Y=1) = 1/2$

C. $F_Y(1.2) = 11/20$

D. $P(Y=2) = 1/4$

11. 设随机变量$X \sim N(a, b^2)$，$Y \sim N(c, d^2)$，b，d都大于0，且$P(X > a+2) > P(Y > c+2)$，则以下选项正确的是

单选题

A. $b > d$

B. $b < d$

C. $a > c$

D. $a < c$

14. 设随机变量X的分布律如下：

X	-1	1	2
p	$1/3$	$1/2$	$1/6$

X的分布函数为$F(x)$，则以下选项正确的有

多选题

A. 当$0 \le x \le 1$时，$F(x) = 1/3$

B. $P(1 < X \le 5/2) = 2/3$

C. $P(X \le 0) = 1/3$

D. 当$1 < x < 2$时，$F(x) = 5/6$

7. 设一公交车站单位时间内等车的人数服从参数为4的泊松分布，现独立观察4个单位时间，X表示“单位时间内至少有一人等车”出现的次数，则$P(X=0)=$

单选题

A. $1-e^{-4}$

B. $1-e^{-16}$

C. e^{-16}

D. e^{-4}

8. 设A,B为两个事件，已知$0<P(A)P(B)<1$，当以下哪个选项成立时，A与B一定独立。

单选题

A. $P(A|\overline{B})=P(\overline{B})$

B. $P(A|B)=P(A)/P(B)$

C. $P(B|\overline{A})=P(\overline{A}|B)$

D. $P(\overline{B}|A)=P(\overline{B}|\overline{A})$